DURÉE : 4 heures

L'objet du problème est l'établissement d'une inégalité entre les intégrales des carrés d'une fonction et de ses dérivées première et seconde. Une première partie établit une inégalité de même type pour certaines séries de « carré sommable » en un sens précisé ci-dessous. Puis la deuxième partie établit l'inégalité pour une famille particulière de fonctions. Enfin, la troisième partie propose une généralisation. Ces trois parties sont **indépendantes**.

$\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^+$ désignent respectivement l'ensemble des nombres réels et l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

PREMIÈRE PARTIE

Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des applications f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$, ou encore des suites de terme général $u_n = f(n)$, pour n entier supérieur ou égal à 1. On désigne par $\mathscr{S}_2$ le sous-ensemble de $\mathscr{S}$ composé des éléments de $\mathscr{S}$ tels que la série de terme général $f(n)^2$ soit convergente.

1. En appliquant l'inégalité de Schwarz à la somme partielle : $\sum_{n=1}^{N} f(n) \cdot g(n)$

pour f et g dans $\mathscr{S}_2$, montrer que la série de terme général $f(n) \cdot g(n)$ est absolument convergente.

2. Montrer que $\mathscr{S}_2$ est un espace vectoriel réel.

3. Soient Δ_1 et Δ_2 les applications de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{S}$ définies par :

$\Delta_1(f) = f_1$

avec $f_1(n) = f(n+1) - f(n)$ pour $n \geqslant 1$

et $\Delta_2(f) = f_2$

avec $f_2(1) = f_1(1)$ et $f_2(n) = f_1(n) - f_1(n-1)$ pour $n \geqslant 2$.

Montrer que Δ_1 et Δ_2 sont des endomorphismes de $\mathscr{S}_2$.

Dans la suite on utilisera la notation :

$$J_0(f) = \sum_{n=1}^{+\infty} (f(n))^2 \quad , \quad J_1(f) = \sum_{n=1}^{+\infty} (f_1(n))^2 \quad \text{et} \quad J_2(f) = \sum_{n=1}^{+\infty} (f_2(n))^2 .$$

4. Soit f définie par : $f(n) = \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

a. On rappelle que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$. Calculer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$

et en déduire la valeur de $J_1(f)$.

b. Calculer : $\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n-1)}$. En déduire la valeur de $J_2(f)$.

c. Démontrer que $(J_1(f))^2 \leqslant J_0(f) J_2(f)$.

A SUIVRE

5. Soit λ un nombre réel. S'il existe f_λ dans $\mathscr{S}_2$, f_λ non identiquement nulle, telle que

$$\Delta_1(f_\lambda) = \lambda f_\lambda,$$

on dira alors que λ est une valeur propre de Δ_1 et f_λ un vecteur propre associé.

Démontrer que, si λ est une valeur propre de Δ_1, λ appartient nécessairement à $]-2, 0[$. Quelle est alors l'expression d'un vecteur propre associé f_λ ?

Calculer alors $J_0(f_\lambda)$, $J_1(f_\lambda)$, puis $J_2(f_\lambda)$. Démontrer que :

$$(J_1(f_\lambda))^2 \leqslant J_0(f_\lambda) J_2(f_\lambda).$$

6. Soient f et g deux éléments de $\mathscr{S}$. Calculer $(fg)_1(n)$ en fonction de $f(n+1)$, $g_1(n)$, $g(n)$ et $f_1(n)$. En déduire l'expression de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (f_1(n))^2 \qquad \text{en fonction de :} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \cdot f_2(n)$$

lorsque f appartient à $\mathscr{S}_2$.

7. Démontrer à l'aide de la question 6. que pour tout f de $\mathscr{S}_2$, on a : $2 J_1(f) \leqslant J_0(f) + J_2(f)$.

8. Vérifier le résultat obtenu dans la question 7. sur les cas particuliers traités dans les questions 4. et 5.

9. Démontrer enfin, à l'aide de la question 6. que pour tout f de $\mathscr{S}_2$, on a : $(J_1(f))^2 \leqslant J_0(f) J_2(f)$.

DEUXIÈME PARTIE

1. Dans un plan rapporté à un repère orthonormé Oab, on considère les courbes (C_0), (C_1) et (C_2) d'équations respectives :

$$5a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{3} = 8$$
$$5a^2 + 3b^2 - 2ab\sqrt{3} = 8$$
$$a^2 + 3b^2 = 4.$$

Déterminer la nature de ces courbes. On précisera leurs axes de symétrie. Montrer que les courbes (C_0), (C_1) et (C_2) sont images l'une de l'autre par des rotations que l'on précisera.

2. Soit $\mathscr{E}$, l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs réelles, et de la forme :

$$f(x) = \left(a \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\pi}{3}\right) + b \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

où a et b sont des réels.

a. Montrer que $\mathscr{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On note f_1 (resp. f_2), la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_1(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\pi}{3}\right) \qquad \left(\text{resp. } f_2(x) = e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Montrer que f_1 et f_2 constituent une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{E}$.

On munit $\mathscr{E}$ du produit scalaire tel que $\mathscr{B}$ soit orthonormée. Calculer le produit scalaire de deux éléments de $\mathscr{E}$ en fonction de leurs composantes sur $\mathscr{B}$.

Tournez la page S.V.P.

b. À toute fonction f de $\mathscr{E}$, on associe sa fonction dérivée f'. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme ϕ de $\mathscr{E}$ et donner sa matrice dans la base $\mathscr{B}$. Quelle est la nature de cet endomorphisme ?

3. *a.* Montrer que les éléments de $\mathscr{E}$ sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$, c'est-à-dire que l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx$$

est convergente, pour f élément de $\mathscr{E}$.

b. Soient ω et φ deux réels. Calculer :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(\omega x + \varphi)\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(\omega x + \varphi)\,dx$$

en fonction de ω et φ. En déduire, pour f élément de $\mathscr{E}$, l'expression de :

$$J_0(f) = \int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx$$

en fonction des composantes a et b de f dans la base $\mathscr{B}$.

c. Évaluer les intégrales $J_1(f) = \int_0^{+\infty} [\phi(f)]^2(x)\,dx$ et $J_2(f) = \int_0^{+\infty} [\phi\circ\phi(f)]^2(x)\,dx$

en fonction de a et b. (On pourra utiliser 2.*b.*)

d. Sans aucun calcul, évaluer l'intégrale :

$$J_3(f) = \int_0^{+\infty} [\phi\circ\phi\circ\phi(f)]^2(x)\,dx$$

en fonction de a et b.

e. Montrer que pour toute fonction f de $\mathscr{E}$, on a :

$$(J_1(f))^2 \leqslant 4\,J_0(f)\,J_2(f)$$

et déterminer tous les éléments f de $\mathscr{E}$ pour lesquels l'égalité a lieu.

TROISIÈME PARTIE

On notera $\mathscr{I}_0$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles et de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$, c'est-à-dire que pour toute fonction f appartenant à $\mathscr{I}_0$, l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx$$

est convergente. Soit $\mathscr{I}_p$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$, p fois continûment dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et dont la dérivée d'ordre p appartient à $\mathscr{I}_0$. On posera :

$$\forall f \in \mathscr{I}_p, \qquad J_p(f) = \int_0^{+\infty} (f^{(p)}(x))^2\,dx$$

où $f^{(p)}$ désigne la dérivée p-ième de f ($f^{(0)} = f$).

A SUIVRE

1. *a.* Montrer que si f et g appartiennent à $\mathcal{I}_0$, alors l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx$$

est convergente.

(On pourra appliquer l'inégalité de Schwarz à $\int_0^X f(x)\, g(x)\, dx$ pour X positif).

En déduire que $\mathcal{I}_0$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que pour toute fonction h de $\mathcal{I}_0$, la primitive de h définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$H(X) = \int_0^X h(x)\, dx$$

vérifie, pour tout X positif ou nul, une inégalité de la forme :

$$|H(X)| \leqslant A\sqrt{X}$$

où A est un nombre réel indépendant de X que l'on évaluera en fonction de h.

2. Soit f appartenant à $\mathcal{I}_0 \cap \mathcal{I}_2$.

a. On veut montrer que la divergence de l'intégrale $J_1(f)$ est incompatible avec la convergence de $J_0(f)$. Pour cela on suppose que :

$$\int_0^{+\infty} f'^2(x)\, dx$$

diverge. Montrer, par une intégration par parties sur un intervalle [0, X], qu'alors $f(X) \cdot f'(X)$ tend vers $+\infty$ quand X tend vers $+\infty$. En déduire que $f^2(X)$ tend vers $+\infty$ quand X tend vers $+\infty$ et que l'intégrale $J_0(f)$ est alors divergente, contrairement à l'hypothèse sur f.

b. En déduire que $\mathcal{I}_0 \cap \mathcal{I}_2$ est inclus dans $\mathcal{I}_1$.

c. Montrer que la limite, quand X tend vers $+\infty$, de $f(X) \cdot f'(X)$ est nulle, ainsi que la limite de $f(X)$. Montrer que ce résultat subsiste si on suppose seulement que f appartient à $\mathcal{I}_0 \cap \mathcal{I}_1$.

d. On suppose que h appartient à $\mathcal{I}_0 \cap \mathcal{I}_2$. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que :

$$\int_0^{+\infty} h'^2(x)\, dx = -\int_0^{+\infty} h(x) \cdot h''(x)\, dx$$

est que : $h(0) \cdot h'(0) = 0$.

3. Pour tout élément f de $\mathcal{I}_0 \cap \mathcal{I}_2$, on pose : $I(f) = J_0(f) - J_1(f) + J_2(f)$.

Tournez la page S.V.P.

a. Soit Y la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$Y(x) = e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Montrer que Y appartient à $\mathscr{S}_0 \cap \mathscr{S}_2$ et calculer Y (0), Y' (0), Y'' (0) et I (Y).

Montrer que, pour g élément de $\mathscr{S}_0 \cap \mathscr{S}_2$,

$$\lim_{X \to +\infty} (Y(X) + Y'(X)) \cdot g(X) = \lim_{X \to +\infty} (Y(X) + Y'(X)) \cdot g'(X) = 0$$

On pourra utiliser 1.*b.* ou 2.*c.*

b. Montrer que Y est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre E à coefficients constants. Pour g élément de $\mathscr{S}_0 \cap \mathscr{S}_2$, on pose :

$$K(Y, g) = \int_0^{+\infty} [Y(x)\, g(x) - Y'(x)\, g'(x) + Y''(x)\, g''(x)]\, dx.$$

En utilisant E pour évaluer Y et Y'' dans K (Y, g), ainsi que 3.*a.*, montrer que K (Y, g) est nulle.

c. Soit f un élément quelconque de $\mathscr{S}_0 \cap \mathscr{S}_2$, et soit h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad h(x) = f(x) - \frac{f(0)}{Y(0)} Y(x).$$

Montrer que $I(f) = I(h)$.

d. En utilisant 2.*d.*, montrer que $I(f)$ est positive ou nulle. Pour quelles fonctions f de $\mathscr{S}_0 \cap \mathscr{S}_2$, $I(f)$ est-elle nulle ?

5. Étant donné un élément f de $\mathscr{S}_0 \cap \mathscr{S}_2$, on définit la fonction Φ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad \Phi(t) = f\left(\frac{t}{\rho}\right)$$

où ρ est un réel strictement positif. Calculer I (Φ) en fonction de ρ, $J_0(f)$, $J_1(f)$ et $J_2(f)$. Montrer que :

$$\forall f \in \mathscr{S}_0 \cap \mathscr{S}_2, \qquad (J_1(f))^2 \leqslant 4\, J_0(f) \cdot J_2(f).$$

Déterminer les fonctions f de $\mathscr{S}_0 \cap \mathscr{S}_2$ pour lesquelles l'égalité est réalisée.

FIN